LÖSUNG

Grundwissen aus der Klasse 10 im Fach Mathematik

Aufgabe 1

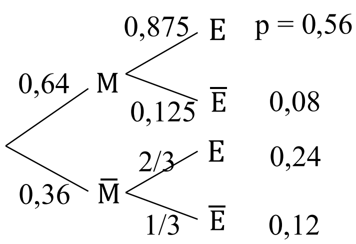
a) k=5
b) $f(-x) = -0{,}11(-x)^4 - 0{,}81(-x)^2 + 5 = -0{,}11(+x^4) - 0{,}81(+x^2) + 5$
$= -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 = f(x)$
der Graph G_f ist achsensymmetrisch

c) NuSt. : $-0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 = 0$ mit Substitution $x^2 = t$
$-0{,}11t^2 - 0{,}81t + 5 = 0$
Lösungsformel: $t_{1/2} = \frac{0{,}81 \pm \sqrt{(-0{,}81)^2 - 4\cdot(-0{,}11)\cdot 5}}{2\cdot(-0{,}11)}$
$t_1 = -11{,}364$ ⇒ keine Lösung für x
$t_2 = 4 \Rightarrow x_1 = +2$ *und* $x_2 = -2$
+2 und -2 sind die Schnittpunkte des Keramikkunstwerks mit der x-Achse (s. Abb.)

d) $f(1{,}6) = -0{,}11 \cdot 1{,}6^4 - 0{,}81 \cdot 1{,}6^2 + 5 \approx 2{,}055 => 2{,}055\ m$ ist die maximale Höhe.

Aufgabe 2

a)



	M	$\overline{M}$	
E	0,56	0,24	0,8
$\overline{E}$	0,08	0,12	0,2
	0,64	0,36	1

b) $P(A) = P(M \cap \overline{E}) = 0{,}08$
$P(B) = P(\overline{M}) = 0{,}36$
$P(C) = P(\overline{M} \cup E) = 0{,}36 + 0{,}8 - 0{,}24 = 0{,}92$
$P(D) = P(M \cap \overline{E}) + P(\overline{M} \cap E) = 0{,}08+0{,}24=0{,}32$

Aufgabe 3

a) $200\text{ mg} \cdot 2{,}5^{-0{,}4t} = 100\text{ mg}$
$2{,}5^{-0{,}4t} = 0{,}5$
$-0{,}4\text{t} = log_{2{,}5}0{,}5$
$\text{t} \approx 1{,}89$ Stunden
b) $\text{m}\left(\frac{50}{60}\right) = 200\text{mg} \cdot 2{,}5^{-0{,}4\cdot\frac{50}{60}} \approx 147{,}36\text{mg}$
c) $\text{m(t)} = 30\text{mg}$
$200\text{mg} \cdot 2{,}5^{-0{,}4\cdot\text{t}} = 30\text{mg}$
$2{,}5^{-0{,}4\cdot\text{t}} = \frac{30}{200}$
$log_{2{,}5}^{\frac{3}{20}} = -0{,}4 \cdot \text{t}$ ⇒ t ≈ 5,17 Stunden , nach ca. 5 Stunden

d) Ausmultiplizieren und vergleichen $m_{alt}(7)$ mit $m_{neu}(1)$

Aufgabe 4
Man liest z.B. die Funktionswerte an den Stellen 0, 1, 2, 3...ab und prüft, ob
$f(x+1) = a \cdot f(x)$
Es ergibt sich dann, dass g und h Exponentialfunktionen sind, die Wachstumsfaktoren betragen etwa 1,2 bzw. 0,9.
Ablesen der Werte g(0)=2 und h(0)=6 ergibt: $g(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$ und $h(x) = 6 \cdot 0{,}9^x$

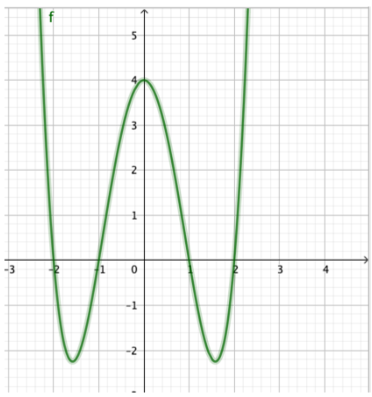
Aufgabe 5
$a)\ 2^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$; $2^x = (2^{-3})^{0,5}$; $2^x = 2^{-1,5}$; x=-1,5
b) $11^x = 11^{-\frac{1}{3}}$; x= –1/3
c) $2 \cdot (\sqrt{3})^x = 18$; $(\sqrt{3})^x = 9$; $3^{0,5x} = 3^2$; 0,5x=2 ; x=4

Aufgabe 6

$a)$ $x^3 = -8$; $x = -\sqrt[3]{8}$; x= –2
b) $-3^{2x} = -9$; $-3^{2x} = -3^2$; 2x=2 ; x=1
c) $0{,}5^{-3x} = 0$ hat keine Lösung

Aufgabe 7

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Grad=4 Koeff.>0 ⇒ Der Graph kommt von links oben und geht nach rechts oben
Gerade Exponenten (4, 2, 0) ⇒ der Graph ist achsensymmetrisch bez. der y-Achse
NuSt.: Substitution $t = x^2$ $t^2 - 5t + 4 = 0$
$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$; $t_1=4$ $t_2=1$; ⇒ $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$ einfache NuSt



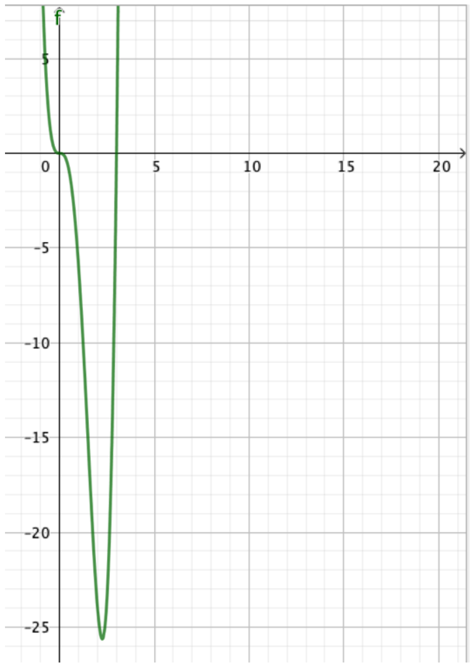
b) $f(x) = 3x^4 - 9x^3$

Grad=4 Koeff.>0 $\Rightarrow$ Der Graph kommt von links oben und geht nach rechts oben

Der Graph ist weder achsen- noch punktsymmetrisch

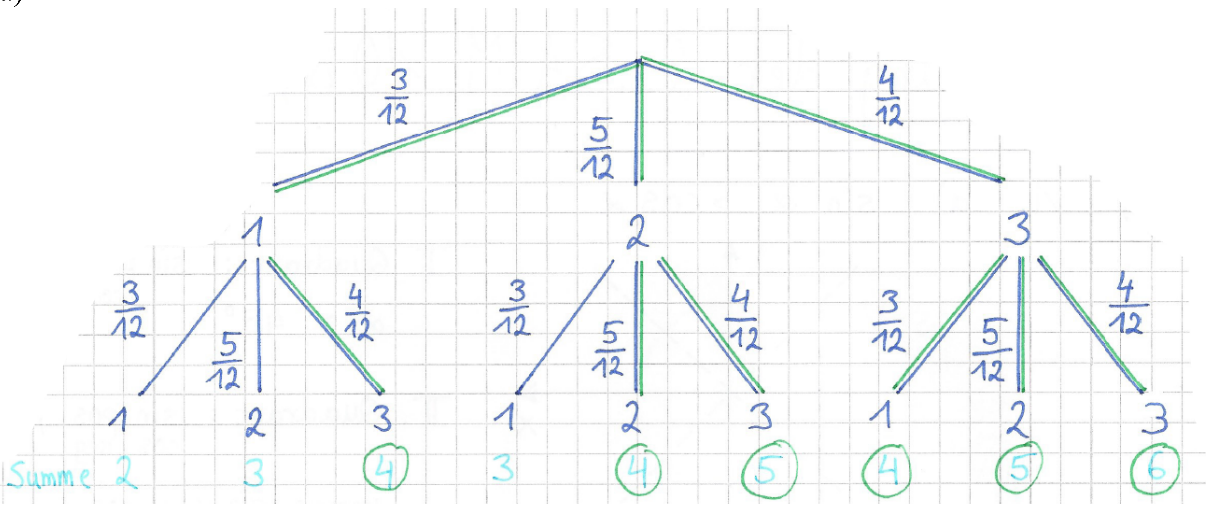
$3x^4 - 9x^3 = 0$; $3x^3(x-3) = 0$;

x_1=0 ist dreifache NuSt. , x_2=3 ist eine einfache NuSt.



Aufgabe 8

a)



$$P(\text{„ Summe mindestens 4 “}) = \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{12} + \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12} + \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\cdot\frac{5}{12} + \frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}$$

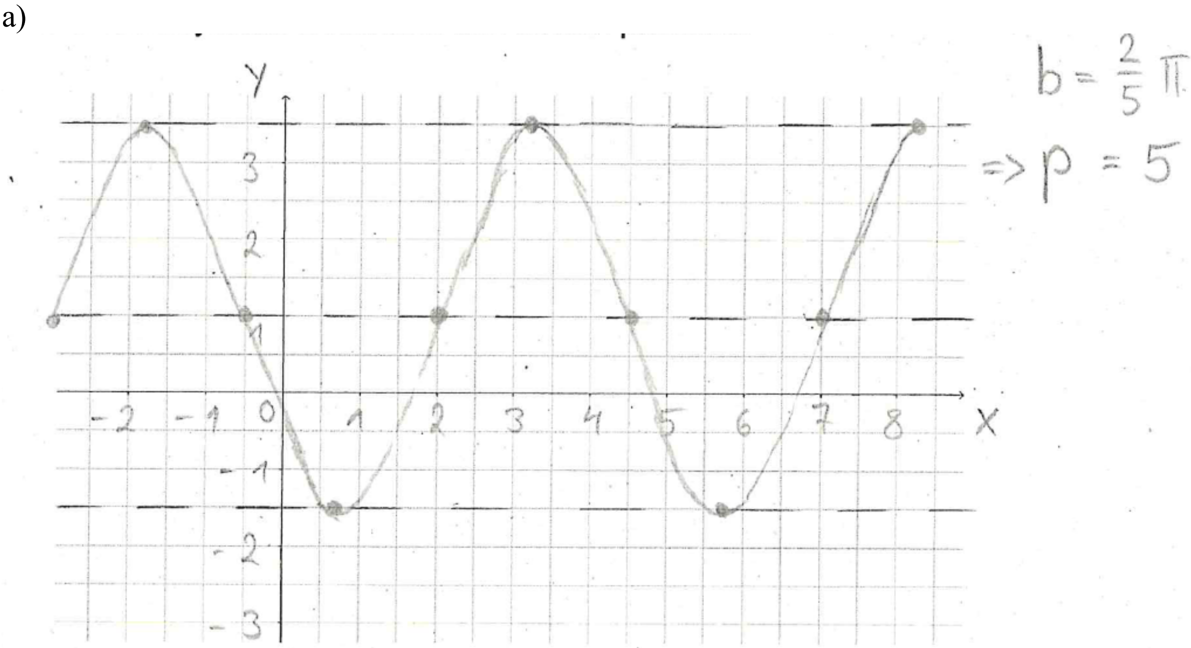
$$= \frac{105}{144} = \frac{35}{48} = 72{,}9\,\%$$

b) A = {111; 112; 121; 211; 113; 131; 311}

$$P(A) = \left(\frac{3}{12}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12} + 3\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^2\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{32} = 15{,}6\,\%$$

Aufgabe 9

a)



b) z.B. $\quad f_1 = 2{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{10}x\right) + 5{,}5 \qquad f_2 = 2{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{10}x + 3\right) + 5{,}5$

Aufgabe 10

Frage 1: Hat jede Pyramide ebenso viele Ecken wie Flächen?
Antwort: Ja
Begründung: Eine Pyramide mit einer n-eckigen Grundfläche hat n+ 1 Ecken (die n Ecken der Grundfläche und die Spitze der Pyramide).
Die n-eckige Grundfläche hat n Seitenkanten. Jede dieser Seitenkanten ist Grundlinie einer dreieckigen Seitenfläche der Pyramide. Die Pyramide hat also n Seitenflächen und die Grundfläche, insgesamt also n + 1 Flächen.
Damit stimmt die Anzahl der Ecken mit der Anzahl der Flächen überein.

Frage 2: Wie verändert sich das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn man die Länge jeder ihrer Grundkanten halbiert und ihre Höhe verdoppelt?
Antwort: Das Volumen der Pyramide halbiert sich.
Begründung: Mit den Bezeichnungen
s_1: Länge der Grundkante der ursprünglichen Pyramide
h_1: Höhe der ursprünglichen Pyramide
s_2: Länge der Grundkante der veränderten Pyramide
h_2: Höhe der veränderten Pyramide
gilt für die Volumina der ursprünglichen und der veränderten Pyramide:

$V_{\text{ursprünglich}} = \frac{1}{3} \cdot s_1^2 \cdot h_1$ $\qquad$ $V_{\text{verändert}} = \frac{1}{3} \cdot s_2^2 \cdot h_2$

Mit $s_2 = \frac{1}{2}s_1$ und $h_2 = 2h_1$ ergibt sich:

$$V_{\text{verändert}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}s_1\right)^2 \cdot 2h_1 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot s_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{ursprünglich}}$$

Aufgabe 11

a. Für das Volumen der Boje gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Boje}} &= \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3\pi + r^2\pi \cdot r + \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot 2r \\ &= \frac{7}{3} \cdot r^3\pi \end{aligned}$$

b. Der Teil der Boje, der mit der fluoreszierenden Farbe bestrichen wurde, hat folgenden Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A_{\text{Farbe}} &= \frac{1}{2} \cdot O_{\text{Kugel}} + M_{\text{Zylinder}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot r \\ &= 4 \cdot r^2\pi \end{aligned}$$

Mithilfe der Gleichung $A_{\text{Farbe}} = 4 \cdot r^2\pi = 90\ \text{dm}^2$ lässt sich der Radius berechnen:
$r \approx 26{,}8\ \text{cm}$

Die Gesamthöhe der Boje beträgt:
$h = r + r + 2r = 4r \approx 4 \cdot 26{,}8\ \text{cm} \approx 107\ \text{cm}$